
Haalbaarheidsonderzoek Stochastisch Onverzadigd Rekenen (SOR)

Auteur: W.H. Pater
State of the Art Engineering BV

Opdrachtgever: Henk Weijers
Waterschap Rivierenland

Datum: 28 February 2019

Inhoudsopgave

Haalbaarheidsonderzoek Stochastisch Onverzadigd Rekenen (SOR)	1
1 Inleiding	4
2. Literatuurstudie	7
4. Eindige Elementen Methode (EEM) ‘framework’	11
5. Modelberekening	16
5.1 validatie experiment	16
5.2 casestudie.....	20
6. Conclusie en aanbeveling	26
Bronnen	28
Appendix: EEM framework (Engels)	30
Notation (bold is the tensor notation)	30
Model formulation	32
Global FE equations.....	33
Local FE equations.....	37
.....	43

1 Inleiding

In het kader van de POV piping is een haalbaarheidsonderzoek uitgevoerd naar stochastisch onverzadigd rekenen (SOR) aan het faalmechanisme piping. De doelstelling van de POV piping is de toepasbaarheid van bestaande rekenregels met betrekking tot piping te verbeteren [15]. Piping is gerelateerd aan verweking en erosie van granulair materiaal met instabiliteit van de waterkering als gevolg [4].

Het in dit haalbaarheidsonderzoek gebruikte rekenmodel richt zich op het verwerkingsproces dat optreedt voor en tijdens piping. Bij gangbare modellen zoals de eindige elementen methode (EEM) wordt het simuleren van grondgedrag tijdens verweking en piping bemoeilijkt door de benodigde constitutieve aannames. Met constitutieve aannames worden grondmodellen zoals Mohr-Coulomb, hardening soil of norsand bedoelt. Een grondmodel heeft als doel het korrelspanning-vervorming verband te beschrijven van een volume materiaal en zijn in de grondmechanica vaak gebaseerd op observaties uit bijvoorbeeld triaxiaal testen [4].

Het is met continuüm modellen zoals de EEM echter niet mogelijk om op korrel niveau interactie, verweking en erosie te modelleren. Met continuüm modellen wordt een volume van een materiaal gesimuleerd en niet de interactie tussen de zandkorrels. Het gevolg is dat geen enkele constitutieve grondmodel in staat is het granulaire gedrag van bijvoorbeeld zand volledig te beschrijven. Simulaties worden bemoeilijkt door de mesh-afhankelijkheid dat optreedt bij verweking en vervormingsbanden. Mesh-afhankelijkheid betekent in deze context dat de grote en vorm van een element meeweegt in de uitkomst van het model. Bovendien kunnen continuüm modellen alleen opgelost worden zolang overal in de ondergrond effectieve spanningen aanwezig zijn [1]. Dat hoeft niet per se het geval te zijn als delen van de dijk al verweekt zijn.

Dit soort praktische en theoretische uitdagingen beperken het gebruik van de EEM bij het bepalen wat er tijdens en na het moment van verweking gebeurt. De EEM is wel in staat om het moment van verweking te bepalen. Omdat de EEM altijd toegepast wordt met een constitutief model zou in theorie deze aanpak nauwkeuriger kunnen zijn dan de 1D heave berekening. De voordelen zijn 1D versus 3D spanningen, constitutieve materiaal onderbouwing, geen aannames over de locatie waar heave kan optreden, een directe koppeling aan een hydraulisch model en de mogelijkheid om on-gesatureerd gedrag mee te laten wegen in de analyse. Mogelijke nadelen zijn dat de constitutieve modellen van parameters moeten worden voorzien. Deze zijn in de praktijk erg kostbaar om te achterhalen. Bovendien kan mesh-afhankelijkheid optreden wat het moment van verweking afhankelijk maakt van de gekozen mesh grote [1].

Wetenschappelijke ontwikkelingen in de theorie van constitutieve grondmodellen maakt het mogelijk meer gedetailleerd het gedrag van (gesatureerd) zand voor verweking te simuleren. Statische verweking wordt in dergelijke werken beschreven als een speciaal type vervormingsband. Deze 'ongedraineerde-bifurcatie' bepaald vervolgens waar statische verweking optreedt [2], [5], [8], [10]. De ontwikkelingen worden in meer detail beschreven in hoofdstuk 2.

De doelstelling van het haalbaarheidsonderzoek is onderzoeken of het gehanteerde rekenmodel gebaseerd op recente wetenschappelijke ontwikkelingen kan helpen bij de toepassing van bestaande rekenregels zoals Sellmeijer. Verweking is daarbij een extra randvoorwaarde waaraan voldaan moet worden alvorens een piping analyse gemaakt kan worden. Het rekenmodel is daarbij te vergelijken met de heave voorwaarde alvorens aan piping gerekend gaat worden. Bij heave wordt gekeken naar een statisch 1D evenwicht in de grond. Daarbij speelt het gewicht en de waterspanning in de grond een belangrijke rol om de effectieve spanningen te bepalen en dus de kans op hydraulische grondbreuk of heave.

Eerder werd al aangestipt dat het achterhalen van grondparameters in de praktijk kostbaar is. Het EEM-rekenmodel maakt het mogelijk om spatiaal met stochastische parameters te rekenen. Met spatiaal wordt de ruimte van het probleemgebied bedoeld. Hierdoor wordt het mogelijk om parameter-variantie binnen grondlagen aan te brengen en doormiddel van een Monte Carlo analyse een verwachtingswaarde van verweking te bepalen. Dit in tegenstelling tot een deterministische analyse waarbij slechts 1 set parameters gehanteerd wordt. Dit ook in tegenstelling tot het type Monte Carlo analyses waarbij met meerdere parameter sets gerekend wordt maar waar geen variatie binnen het zandpakket zelf is aangebracht.

De Sellmeijer formule wordt doorgaans toegepast met 1 deterministische-maatgevende parameter set terwijl de zandlaag in werkelijkheid kan bestaan uit 10-tallen sub-lagen dat in alle richtingen variatie heeft in dichtheid en korreldiameter. Ook al is er statistiek gebruikt bij de bepaling van de determinist parameters, het lijkt niet tot een gedetailleerde gevoeligheidsanalyse.

Een Monte-Carlo analyse in deze context is een serie van berekeningen waarbij steeds met een nieuwe laagvariantie gerekend wordt aan de hand van de gekozen stochastische grondparameters. De werkwijze wijkt af van het stochastische ondergrondmodel dat nu gehanteerd wordt in Nederland. Het grootste verschil is dat er een groot aantal simulaties gemaakt worden met op basis van de gemiddelde waarde, standaarddeviatie en correlatie-lengte van de parameter. Deze parameters kunnen in de praktijk bijvoorbeeld gemeten worden met behulp van geofysisch meten. Elke simulatie wordt vervolgens gestart met een unieke ondergrond.

Het EEM-rekenmodel maakt het tevens mogelijk om tijdsafhankelijk te rekenen aan de hydraulische belasting (tijdens een hoogwater periode) dat kan resultereert in verweking en uiteindelijk piping. Een belangrijke component hierin is het onverzadigde gedrag van de ondergrond. Als de ondergrond (gedeeltelijk) onverzadigd is treedt een hogere intrede weerstand op wat invloed heeft op de snelheid van verzadiging en verweking.

Het EEM-rekenmodel of framework wordt in volgende hoofdstukken gedetailleerd beschreven. Om invulling te geven aan het haalbaarheidsonderzoek is een korte literatuurstudie uitgevoerd met daarin de oorsprong van het EEM-rekenmodel. Vervolgens is een praktijkstudie uitgevoerd waarbij het gebruikte model is gevalideerd en toegepast op een typisch voorbeeld van een dijk waarbij piping kan optreden.

2. Literatuurstudie

Om een probleem zoals piping te modelleren kunnen verschillende methoden toegepast worden. Deze zijn ruwweg op te delen in analytische of numerieke methoden. Een analytische oplossing is gebaseerd op een onderliggend complex model die onder ideale omstandigheden uitvoerbaar is. Er is bijvoorbeeld een analytisch oplossingen beschikbaar voor de Richard's equations die gebruikt wordt om grondwaterstroming in de ongesatureerde- of vadoze zone te beschrijven. De vadoze zone is het deel van de ondergrond tussen het oppervlak en de freatische zone. Echter deze zijn alleen beschikbaar voor 1-dimensionale problemen en met een sterk versimpelde grondwater model [13].

Numerieke methoden hebben het voordeel dat ze een groot toepassingsdomein hebben. Het oplossen van grote hoeveelheid vergelijkingen die hiermee gepaard gaat is echter een rekenintensieve opgave. De numerieke methoden zijn onder te verdelen in continuüm en discrete methoden. Een voorbeeld van een continue methode is de eindige elementen methode (EEM) [11]. Een discrete methode zoals de discrete element method (DEM) leent zich ook voor piping berekeningen maar is de meest rekenintensieve manier.

Het onderzoek draait in de basis om het contact tussen zand deeltjes wat verloren gaat tijdens verweking en uiteindelijk resulteert in erosie/piping. Bestaande rekenregels zoals Sellmeijer beschrijft de gehele dijk (hydraulische randvoorwaarden en ondergrond) met een enkele som.

EEM beschrijft een volume zand deeltjes en is in staat om laag variatie en complexe hydraulische randvoorwaarden zoals een voorland te simuleren. Hierdoor neemt de vraag naar reken capaciteit echter toe omdat meer sommen tegelijk opgelost moeten worden.

DEM gaat nog verder terug naar zandkorrel niveau en kan met relatief simpele interactie sommen met hoge precisie weergeven wat er gebeurt in een deel van de dijk waar zandkorrels het contact verliezen tijdens een hoogwater periode. Omdat elke interactie een aparte rekensom oplevert moet er dan tegelijkertijd miljarden berekeningen tegelijk gemaakt worden. Dit is iets wat veelal nog niet mogelijk is met de huidige snelheid van computers. Het is daarom niet praktisch toepasbaar op de schaal van een dijk.

Het EEM-rekenmodel bestaat uit een aantal onderdelen. Het hart van het model bestaat uit een constitutief model die grondspanning en vervorming beschrijft. Daarnaast is het noodzakelijk in het geval van verweking om grondwater te beschrijven met een model dat van toepassing is in zowel de gesatureerde als ongesatureerd zone van de dijk.

Een algemeen geaccepteerd principe om grondgedrag te beschrijven is het zogenaamde critical-state concept. Het critical-state principe gaat ervan uit dat granulair materiaal zoals zand vervormd kan worden tot een stabiele critical-state bereikt wordt waarbij geen verdere spanningsverandering optreedt en het zand zich als vloeistof gedraagt [6]. Hiermee wordt bedoeld dat er geen verdere volumeverandering optreedt in dat deel van het probleem domein. Ontwikkelingen van dit concept hebben geresulteerd in het Norsand model dat dichtheidsveranderingen in zand simuleert onder invloed van schuif-vervorming [5,2].

Er zijn verschillende wetenschappelijk publicaties beschikbaar met daarin uiteenzettingen over de invloed van variabele dichtheid op het ontstaan van schuif-vervorming, vervormingsbanden en instabiliteit [1,3,8,9]. Bijna alle publicaties benoemen bifurcatie als het punt waarop de numeriek oplossing onbetrouwbaar wordt en mesh afhankelijkheid optreedt. Er worden verschillende manieren benoemd waarmee het rekenmodel stabiel kan blijven ook na bifurcatie [10].

Alvorens piping kan optreden moet er sprake zijn van verweking. Verweking is een fase waarin de grond zich bevindt als de korrels geen of weinig contact meer hebben met elkaar en het materiaal zich gedraagt als vloeistof. Verweking wordt beschreven als een speciale vorm van bifurcatie ofwel ongedraineerde bifurcatie [4]. De deelconclusie is dat er een brede basis in de literatuur voor het gebruik van het Norsand model om grondgedrag zoals zand te beschrijven. Het model is echter betrouwbaar tot het punt van bifurcatie en verweking is een speciale vorm van bifurcatie.

Naast het constitutief grondmodel is het ook noodzakelijk een hydraulisch model te formuleren. Het hydraulisch model complementeert het constitutieve model doordat de waterspanning onder de dijk voor elke tijdstap tijdens hoogwater berekend wordt. Een algemeen geaccepteerd model om grondwater stroming in de ongesatureerde zone te beschrijven zijn de Richard's equations [11]. Daarbij is het noodzakelijk om de water retentie curve te beschrijven. Een gesloten vorm oplossing voor de water retentie curve is beschikbaar middels de zogenaamde van Genuchten formule [7].

De onverzadigde zone heeft op verschillende manieren invloed op grondwaterstroming en grondgedrag. In de eerste plaats heeft zuigspanning in de onverzadigde zone invloed op de doorlatendheid van de grond die daardoor kleiner wordt. Daarnaast verhoogt zuigspanning de korrelspanning en heeft het invloed op de dichtheidsverandering in het deel van de waterkering waar zuigspanningen aanwezig zijn [9]. De doorlatendheid is zoals gezegd afhankelijk van de zuigspanning. Daarnaast bestaat er ook een verband tussen de intrinsieke of gesatureerde doorlatendheid met specifieke dichtheid [10]. Er zijn voorbeelden beschikbaar in de

literatuur waarbij vervormingsbanden en bifurcatie veroorzaakt wordt door variatie in initiële dichtheid aan te brengen of een simulatie te beginnen met een initiële variërende zuigspanning [3].

Een deelconclusie van het literatuuronderzoek is dat grondwaterstroming in de verzadigde en onverzadigde zone beschreven kan worden met de Richard's partiele differentiaalvergelijking in combinatie met de van Genuchten waterretentie formule [7]. De onverzadigde zone heeft bovendien invloed op korrelspanning, dichtheidsveranderingen en doorlatendheid van de grond. Het feit dat variatie in dichtheid vervormingsbanden en bifurcatie veroorzaakt is van interesse met betrekking tot het faalmechanisme piping. Vanuit de literatuur kan in ieder geval vastgesteld worden dat dichtheid invloed heeft op het ontstaan van vervormingsbanden, bifurcatie en dus ook op verweking.

De mechanische vergelijkingen dienen gekoppeld te worden aan de hydraulische vergelijkingen. Een algemeen geaccepteerde basis hiervoor zijn de zogenaamde Biot's vergelijking [3,11,12]. Daarbij wordt in het EEM-domein op elke locatie de grondwaterspanning en vervorming berekend. Een uitgebreide uiteenzetting van de hydromechanisch gekoppelde formules zijn voorhanden in het hoofdstuk met de casestudie.

Tot slot moet er een systeem geformuleerd worden waarbij zogenaamde random fields gegenereerd worden met daarin dichtheid als stochastische parameter. In de literatuur zijn voorbeelden van een normale verdeling en lognormale verdeling die toegepast wordt op een dichtheidsparameters [9,14]. In veel gevallen wordt niet gerekend met een correlatie-lengte. Het correlatie-lengte is een parameter die beschrijft hoeveel afstand tussen twee punten bestaat die verder geen parameter waarde verband met elkaar. De waarde van de parameter van alle tussenliggende rekenpunten wordt geïnterpoleerd. Voor alle duidelijkheid: het EEM bestaat uit elementen die op hun beurt bestaan uit rekenpunten bestaan. Norsand maakt een stress-strain berekening in elk rekenpunt op basis van (geïnterpoleerde) parameters (hydraulische) randvoorwaarden van het model.

Als geen correlatie-lengte gebruikt zou worden dan is dichtheidsvariatie afhankelijk van de hoeveelheid rekenpunten en dus hoeveelheid elementen. Het niet gebruiken van een lengte-effect bij de toewijzing van stochastische variabelen creëert dus nog meer mesh-afhankelijkheid. Een voorbeeld van de toepassing van correlatie-lengte is te vinden in het hoofdstuk over de casestudie.

De belangrijkste conclusies van het literatuuronderzoek is dat er veel voorbeelden in de literatuur te vinden zijn waarbij het zogenaamde Norsand model in gesatureerde en ongesatureerde grond toegepast wordt om vervormingsbanden te simuleren. Verweking is een voorwaarde voor piping. In de literatuur is verweking een vorm van

ongedraineerde bifurcatie. Bifurcatie is numeriek lastig te simuleren en over het algemeen treedt mesh-afhankelijkheid op. Vervormingsbanden worden getriggerd door variatie in dichtheid of initiële saturatie graad aan te brengen. De fysische reden is dat variërende dichtheid onder dezelfde belasting volume afname of juist toename kan veroorzaken in zand. Hierdoor ontstaan afwijkende stress paden [1], [2], [3] en [4] en daardoor een afwijkende uitkomst. Door het gebruik van een correlatie-lengte wordt voorkomen dat er een mesh-afhankelijkheid optreedt. In de literatuur wordt vaak een normale of lognormale verdeling aangehouden om de dichtheid te beschrijven.

4. Eindige Elementen Methode (EEM) 'framework'

Het EEM 'framework' staat uitgebreid beschreven in de appendix. Omdat een groot deel van de gebruikte termen niet of lastig te vertalen zijn naar het Nederlands is de appendix in het Engels. Hier volgt een kort overzicht van de belangrijkste formules en differentiaalvergelijkingen die eerdergenoemd zijn in de literatuurstudie.

Het EEM 'framework' bestaat uit twee niveaus. Op het lokale of rekenpunt niveau wordt verzadigingsgraad, doorlatendheid, grondwaterstroming en constitutief materiaal gedrag beschreven. Aan de hand van de berekende variabelen en element 'shapes' wordt vervolgens op globaal niveau de differentiaalvergelijkingen gevuld. Na een oplossing op globaal niveau worden de uitkomsten zoals waterspanning en materiaal vervorming weer doorgegeven naar lokaal niveau om opnieuw lokale variabelen uit te rekenen. Het model bestaat dus uit een multi-level Newton algoritme om de niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en formules op lokaal en globaal niveau uit te rekenen.

De globale Biot's vergelijking die in zowel de gesatureerde als ongesatureerde zone werkt [1]:

$$\int_{A1}^{A2} \nabla^s \mathbf{N}^T \{ \bar{\sigma} - S_r p_w \mathbf{1} \} dA - \int_{A1}^{A2} \mathbf{N}^T \rho g dA - \int_{\partial L1}^{L2} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dL = 0 \quad (1)$$

$$\int_{A1}^{A2} \bar{\mathbf{N}}^t S_r \mathbf{1} \cdot \nabla^s \mathbf{N} (u - u_n) dA \dots$$

$$+ \int_{A1}^{A2} \bar{\mathbf{N}}^t (1 - \phi^s) (S_r - S_{r,n}) dA - \Delta t \int_{A1}^{A2} \mathbf{E}^t \bar{\mathbf{v}} dA = 0 \quad (2)$$

De eerste vergelijking heeft betrekking op de spanningen in de grond. De tweede vergelijking op grondwater. De eerste integraal geeft aan welke interne spanningen in de grond aanwezig zijn. Het deel tussen haakjes: $\{ \bar{\sigma} - S_r p_w \mathbf{1} \}$ Beschrijft de Bishop spanning namelijk effectieve spanning $\bar{\sigma}$ minus saturatiegraad S_r en waterspanning p_w [1]. De tweede en derde integraal heeft betrekking op de dichtheid ρ vermenigvuldigd met de gravitatie versnelling g . De laatste integraal heeft

betrekking op randvoorwaarde spanningen $\hat{\mathbf{t}}$ buiten het model zoals wegbelasting. Door vergelijking 1 op te lossen in elk rekenpunt van het EEM ontstaat er een beschrijving van de balans tussen interne spanningen (1^e integraal) en externe spanningen (2^e en 3^e integraal).

De tweede vergelijking geeft betrekking op grondwaterstroming. De eerste integraal is het effect van vervorming op waterspanning: $S_r \mathbf{1} \cdot \nabla^s \mathbf{N} (u - u_n)$. Waarbij verplaatsingsincrement $(u - u_n)$ bijdraagt aan een afname van volume en dus een toename van waterspanning. Het tweede integraal heeft betrekking op de storage equation. De verandering in saturatie-graad $(S_r - S_{r,n})$ betekent de verandering van waterinhoud in de poriën van het materiaal wat invloed heeft op waterspanning. In de gesatureerde situatie vervalt deze term. De laatste integraal heeft betrekking op de tijdsafhankelijke vloeistofstroming in de poriën van het materiaal die afhankelijk is van de potentiëlen in het element en op de buitenranden van het model.

Het betreft hier een 2D systeem dus vandaar dat de integralen $(\int_{A1}^{A2} dA)$ over de oppervlakte berekend worden en niet volume zoals het geval zou zijn bij een 3D systeem. Hierbij is $\bar{\sigma}$ de effectieve stress die uitgerekend wordt op lokaal niveau middels het Norsand model.

De saturatiegraad S_r varieert van 0 voor ongesatureerd en 1 voor volledig gesatureerd. De waterspanningsvariabele wordt beschreven met p_w . De eerste integraal beschrijft het totale interne moment is het grondvolume. De tweede en derde integraal van vergelijking (1) hebben betrekking op externe spanningen zoals het eigengewicht en spanningen op de randen van het EEM-domein. Vergelijking 1 wordt vaak de momentum balans genoemd die materiaal vervorming beschrijft.

Vergelijking 2 is de massa balans die waterspanning in de poriën beschrijft. De eerste integraal beschrijft de invloed van vervorming op waterspanning. Het tweede integraal beschrijft de invloed van wateropslag in de poriën van de grond. De derde integraal beschrijft Darcy flow in het gesatureerde en ongesatureerde deel van de grond. Afhankelijk van Δt wordt de oplossing gedraineerd (grote tijdstappen) of ongedraineerd (kleine tijdstappen). In de ongedraineerde situatie worden meer wateroverspanningen gecreëerd dan kan wegvloeien door de poriën van het grond volume.

In het ongesatureerde deel van de waterkering wordt aangenomen dat de Van Genuchten waterretentie formule opgaat. De formule wordt als volgt in de literatuur beschreven:

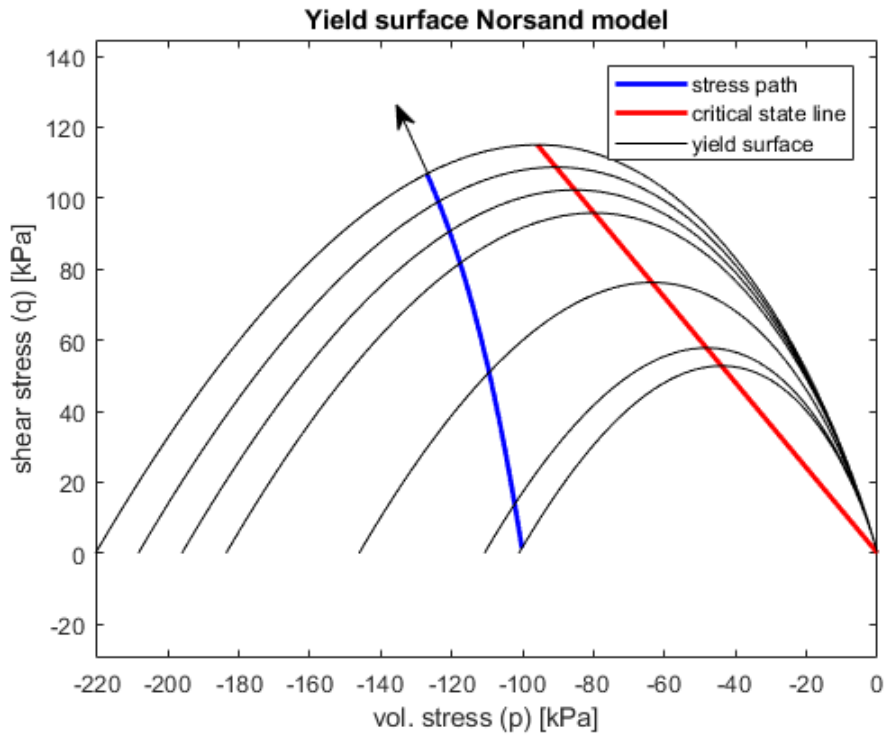
$$S_r = S_1 + (S_2 - S_1) \left(1 + \left(\frac{c_p}{S_a} \right)^n \right)^{-m} \quad (3)$$

Afhankelijk van de capillaire waterspanning c_p en parameters S_1, S_2, n, s_a en m wordt berekend wat de saturatiegraad is. Het Norsand model bestaat uit de volgende yield surface:

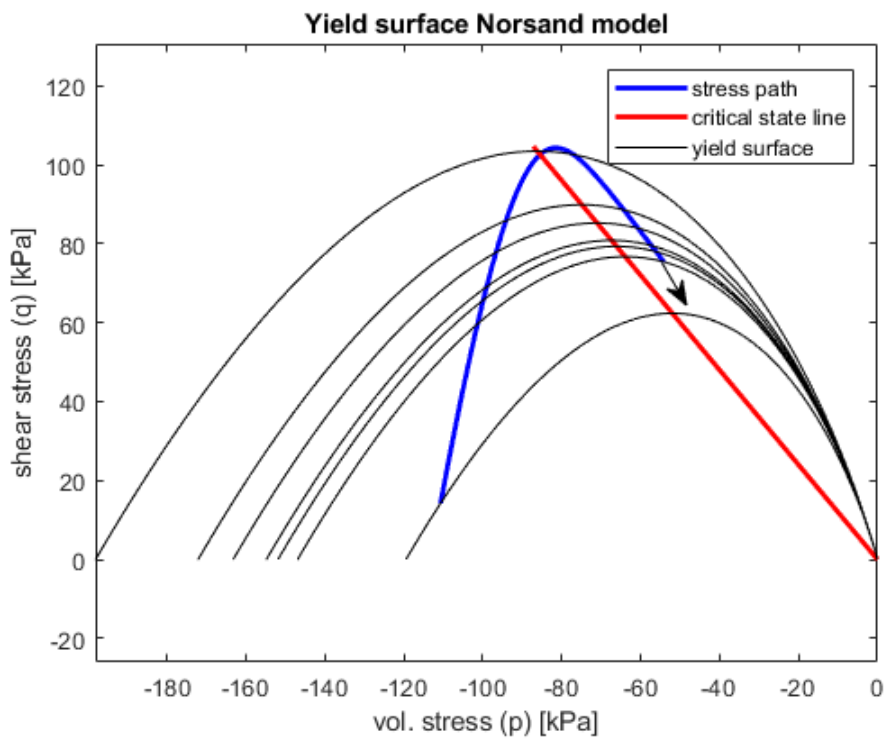
$$F = \delta * q + \frac{M}{N} * (1 - (1 - N) * \left(\frac{\bar{p}}{p_i}\right)^{\frac{N}{1-N}}) * \bar{p} \quad (4)$$

De variabelen \bar{p} , q en δ van (4) zijn afhankelijk van de stress tensor. M is de helling van de critical-state lijn en afhankelijk van de hoek van inwendige wrijving φ_{CS} . N is een yield surface parameter die in de literatuur gevarieerd wordt tussen 0 en 0.4. Een uitgebreide beschrijving van het Norsand model is te vinden in de appendix. Een voorbeeld van een spanningspad die berekend wordt met Norsand zijn weergegeven in figuur 1 en 2.

De flow surface is gelijk aan de yield surface in dit associatief grondmodel. In de literatuur zijn voorbeelden van niet-associatieve Norsand modellen. Daarbij is parameter N in de flow surface (4) lager of gelijk aan N in de yield surface. Daarmee wordt het volumieke deel van de flow surface niet-associatief wat invloed heeft op de richting en daarmee hoogte van het spanningspad. In dit onderzoek wordt uitgegaan van een associatieve yield surface. Toekomstig onderzoek met behulp van parameter fitten op zand samples moet uitwijzen of dit opgaat.



Figuur 1: dichtheidstoename door volume compressie(hardening)



Figuur 2: dichtheidsafname door schuifvervorming (softening)

Figuur 1 beschrijft een spanningspad waarbij de dichtheid van het volume grond toeneemt. Te zien is aan de blauwe lijn dat volume spanning \bar{p} en schuifspanning q toenemen. Het spanningspad beweegt bijna parallel aan de critical state lijn. De zwarte ellips is de yield surface. Elke keer als het spanningspad de yield surface doorkruist gaat het lokale Newton algoritme aan het werk om een nieuwe yield surface, en bijbehorende materiaalspanningen uit te rekenen. De dichtheidstoename is af te leiden uit het feit dat de yield surface groter wordt elke keer als deze doorkruist wordt.

Bij het spanningspad van figuur 1 zal de critical-state niet bereikt worden. Dit komt omdat de vervorming vooral ontstaat uit compressie. Er treedt hardening of volume afname op. In figuur 2 is een voorbeeld te zien van een situatie waarbij de critical-state bereikt wordt en vervolgens zelfs dichtheidsafname. Het spanningspad gaat rechtstreeks richting de critical-state lijn door de schuifvervorming. Het komt uiteindelijk aan de andere kant van de ellips uit waar de grond zich anders gedraagt. In dat deel in tegenstelling tot de eerste situatie zal schuifvervorming voor volume afname zorgen. Dit softening gedrag zal in veel gevallen resulteren in een vervormingsbanden, bifurcatie en mesh-afhankelijkheid.

Het Norsand beschrijft door dit mechanisme granulair materiaal gedrag waarbij als resultaat van schuifvervorming dichtheidstoename optreedt in los gepakt zand en dichtheidsafname in verdicht zand. Dit proces wordt in sterke mate beïnvloed door de keuze van initiële dichtheid parameter. Als de initiële dichtheid al vrij hoog is zal eerder de critical-state bereikt worden en softening, vervormingsbanden en bifurcatie optreden.

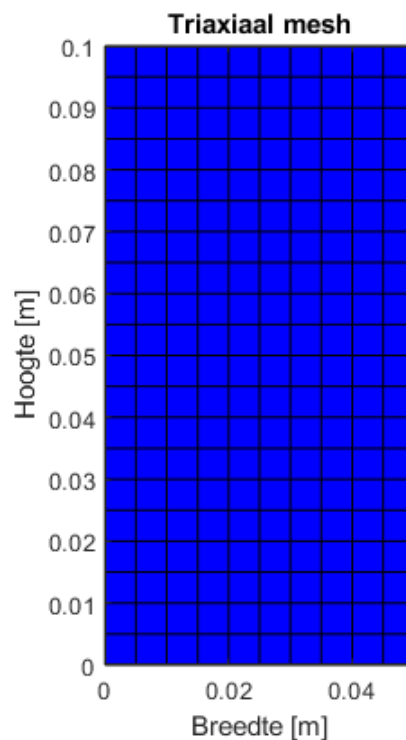
In relatie tot het piping faalmechanisme kan gesteld worden dat variatie in initiële dichtheid gevolgen heeft voor gesatureerde doorlatendheid, hardening/softening gedrag van de grond en verweking/bifurcatie.

Daarmee is alvast vast te stellen dat initiële dichtheid invloed heeft op verweking en dus op piping. In hoeverre dit daadwerkelijk invloed heeft zal moeten blijken uit de dichtheidsverschillen die aangetroffen worden in de praktijk.

5. Modelberekening

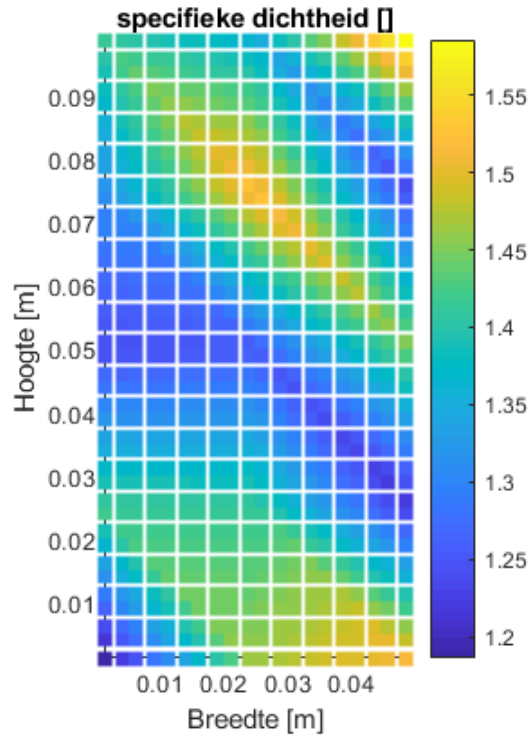
5.1 validatie experiment

Dit hoofdstuk bestaat uit een validatie berekening en uit een casestudie. De validatie berekening bestaat uit een simulatie van een triaxiaal test die horizontaal een constante spanning heeft en verticaal in elkaar gedrukt wordt. Voor verdere uitleg van grond- en simulatie parameters wordt verwezen naar [3]. De resultaten zijn weergegeven in figuur 3 t/m 6.



Figuur 3: EEM Mesh

Het eindige elementen mesh bestaat uit 200 gestabiliseerde quadrilateral elementen met horizontale, verticale en waterspanning variabelen. Middels een correlatielengte en gemiddelde dichtheid en een standaarddeviatie wordt een initiële dichtheid toegekend aan elk rekenpunt. Dit is weergegeven in figuur 4.



Figuur 4: initiële dichtheid

De random initiële dichtheid is gegenereerd met een lognormale verdeling. De vertaling van normale verdeelde stochastische parameters vindt als volgt plaats [14]:

$$e0_i = e^{(\mu_{\ln(e0)} + \sigma_{\ln(e0)} G_i)} \quad (5)$$

Waarbij $e0_i$ de initiële dichtheid is van element i . En waarbij $\mu_{\ln(e0)}$ en $\sigma_{\ln(e0)}$ respectievelijk de lognormale gemiddelde en standaarddeviatie waarde is van stochastische parameter $e0$. G_i wordt gegenereerd aan de hand van een standaard normale verdeling met behulp van het correlatie-lengte. Het correlatie-lengte bepaald de afstand tussen 2 rekenpunten die geen stochastisch verband meer met elkaar hebben. Alle rekenpunten daartussen krijgen een geïnterpoleerde waarde. De lognormale gemiddelde waarde wordt berekend met:

$$\mu_{\ln(e0)} = \ln(\mu_{e0}) - \frac{1}{2} \sigma_{\ln(e0)}^2 \quad (6)$$

Waarbij de lognormale gemiddelde waarde $\mu_{\ln(e0)}$ berekend wordt aan de hand van de gemiddelde waarde μ_{e0} van de dichtheid en de lognormale standaard-deviatie $\sigma_{\ln(e0)}$.

De lognormale standaarddeviatie wordt tot slot berekend met:

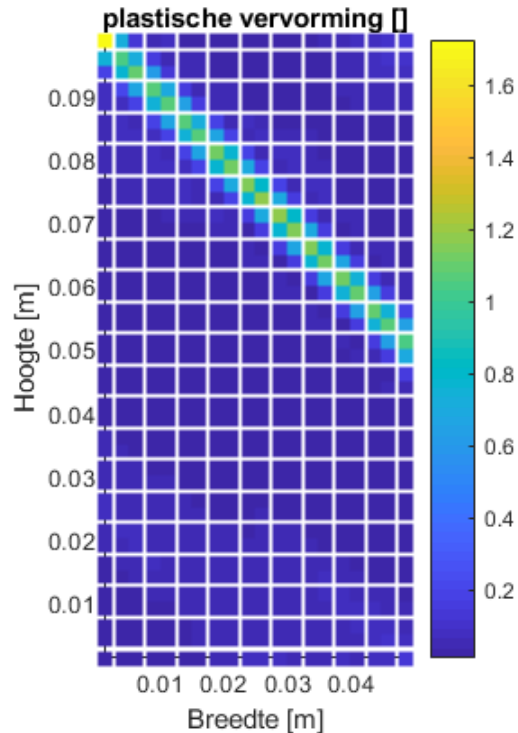
$$\sigma_{\ln(e_0)}^2 = \ln \left(1 + \left(\frac{\sigma_{e_0}}{\mu_{e_0}} \right)^2 \right) \quad (7)$$

Waarbij μ_{e_0} de gemiddelde waarde van de dichtheidsvariabele is en σ_{e_0} de standaarddeviatie. Afhankelijk van de gekozen μ_{e_0} , σ_{e_0} en correlatie-lengte wordt dus een stochastisch dichtheidsveld gegenereerd. Voor een uitvoerige uiteenzetting van dit systeem wordt verwezen naar [14].

Er had ook voor een ander stochastisch model gekozen kunnen worden. Zo kan bijvoorbeeld een andere distributie gekozen worden zoals gewoon normaal verdeeld. Ook kan met verschillende algoritmes parameter velden gegenereerd worden. Ongetwijfeld zal dit andere resultaten opleveren maar het is van belang dat er een systeem gekozen wordt dat zoveel mogelijk lijkt op de werkelijkheid in zowel verdeling als gemiddelde waarde als standaarddeviatie.

Voor zover de schrijver bekend is zijn er andere POV-projecten op touw gezet om dit facet verder uit te zoeken. Het stochastische model is hier derhalve volledig inwisselbaar.

Te zien is dat op de locatie met een hogere dichtheid een vervormingsband ontstaat waarbij plastische vervorming in een dunne band gebundeld wordt. Dit is conform de theorie hoe een Norsand model hoort te werken en ook conform eerdere experimenten uit de literatuur [3].

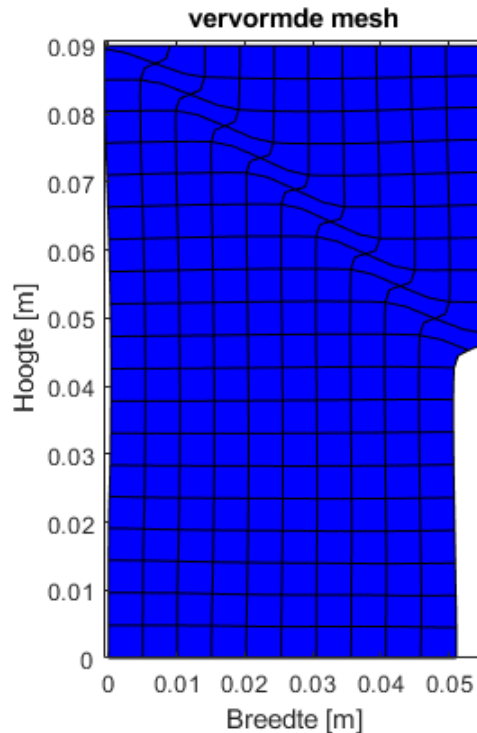


Figuur 5: vervormingsband

Het vervormde mesh is weergegeven in figuur 6. Afgezien van het feit dat er een goede overeenkomst is met de literatuur ([1], [2], [3]) valt het op dat de plastische vervorming gebundeld is binnen de range van 1 element. Dit is toe te kennen aan softening, bifurcatie en mesh-afhankelijkheid.

Zodra een element onsamendrukbaar wordt doordat het de critical state bereikt heeft, doordat het een hogere initiële dichtheid had, kan het alleen nog maar 'shearen'. Dit is te zien in figuur 5 en 6. Het neemt alle vervorming in de triaxiaal simulatie op waarbij alle vervormingsenergie gebundeld wordt in de rekenpunten die de critical state bereikt heeft.

Als een grotere elementen gebruikt zou worden in dezelfde test dan had dit geresulteerd in een bredere vervormingsband aangezien de rekenpunten dan voor grotere representatieve oppervlaktes staan. Een grotere representatieve oppervlakte had geresulteerd in wellicht een later punt van bifurcatie of zelf een andere vervormingsband. Hiermee wordt dus mesh-dependency gecreëerd.

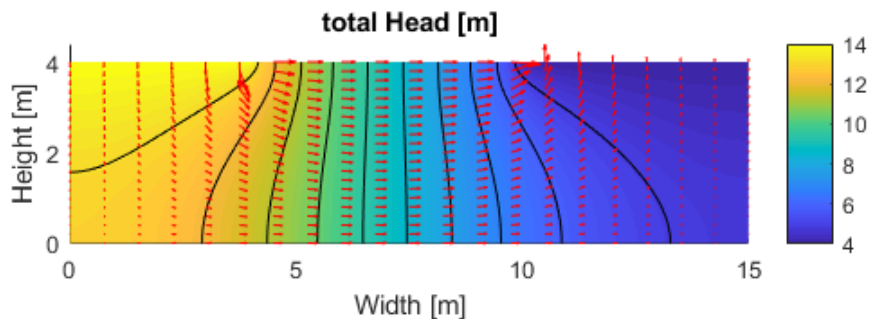


Figuur 6: mesh vervorming

Aangezien verweking als belangrijke indicator voor piping gezien wordt en het feit dat verweking een vorm van ongedraineerde bifurcatie is kan gesteld worden dat mesh-afhankelijkheid een probleem wordt bij het betrouwbaar en consistent aantonen van het piping faalmechanisme met het huidige EEM 'framework'.

5.2 casestudie

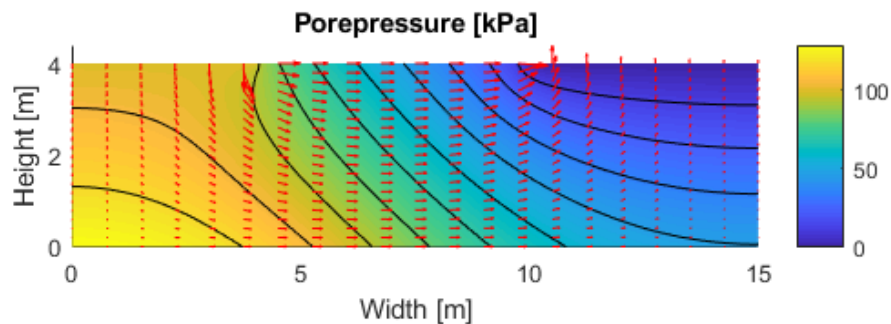
Voor de casestudie is gekozen voor een simpele vierkante dijkondergrond. Om verweking te induceren is een probleemgebied van 15 meter breed gekozen met een ondoorlatende dijk van 5 meter breed in het midden. De dijk ondergrond is weergegeven in figuur 7. Aan de linkerkant (bovenkant) is een constant waterpeil aangebracht (10 m. Aan de rechterkant (bovenkant) kan het water uitreden. Aan de pijlen is te zien hoe het water onder de dijk doorstroomt. Het water treedt vlak achter de dijk uit. De bijbehorende waterspanningen zijn weergegeven in figuur 8.



Figuur 7: Potentiaal en hydraulische gradiënt

Vanaf dit moment loopt de casestudie moeizaam. Er treden problemen op met het bepalen van het eigengewicht, mesh-afhankelijkheid, element grootte en de keuze voor tijdstappen. Het eerste probleem is het bepalen van het eigengewicht van het systeem. Norsand moet een bepaalde begin spanning hebben om een realistische initiële conditie te genereren. Bij een triaxiaal simulatie is deze gelijk te stellen aan de omgevingsspanning of cel-spanning. Zo ontstaat een isotrope beginconditie. Bij de ondergrond van een dijk is echter sprake van een anisotrope beginconditie. Het gevolg is dat de initiële spanningen gegenereerd moeten worden met het eigen gewicht van de ondergrond. Er treden dan twee problemen op. In de eerste plaats zijn bij het Norsand model de elastisch parameters spanningsafhankelijk. Bij geringe initiële spanningen ontstaan onrealistische vervormingen die voor bifurcatie zorgt nog voordat verweking kan ontstaan.

Bovendien wordt het eindresultaat van deze zwaartekracht stap sterk afhankelijk van de grote van de gekozen laadstap. De oplossing lijkt te zijn dan het complete gewicht toegekend moet worden in 1 laadstap. Echter voor de berekening van realistisch plastische vervormingen is het juist noodzakelijk om incrementele laadstappen te nemen. In de literatuur wordt vaak gekozen om 3 laadstappen te nemen van 10%, 50%, 100%. Dat lijkt hier echter niet tot een goede spanningsverdeling of een stabiele initiële conditie. Opvallend genoeg gaat de meeste literatuur met betrekking tot Norsand ook over triaxiaal proeven en niet een macroprobleem zoals de ondergrond van een dijk.



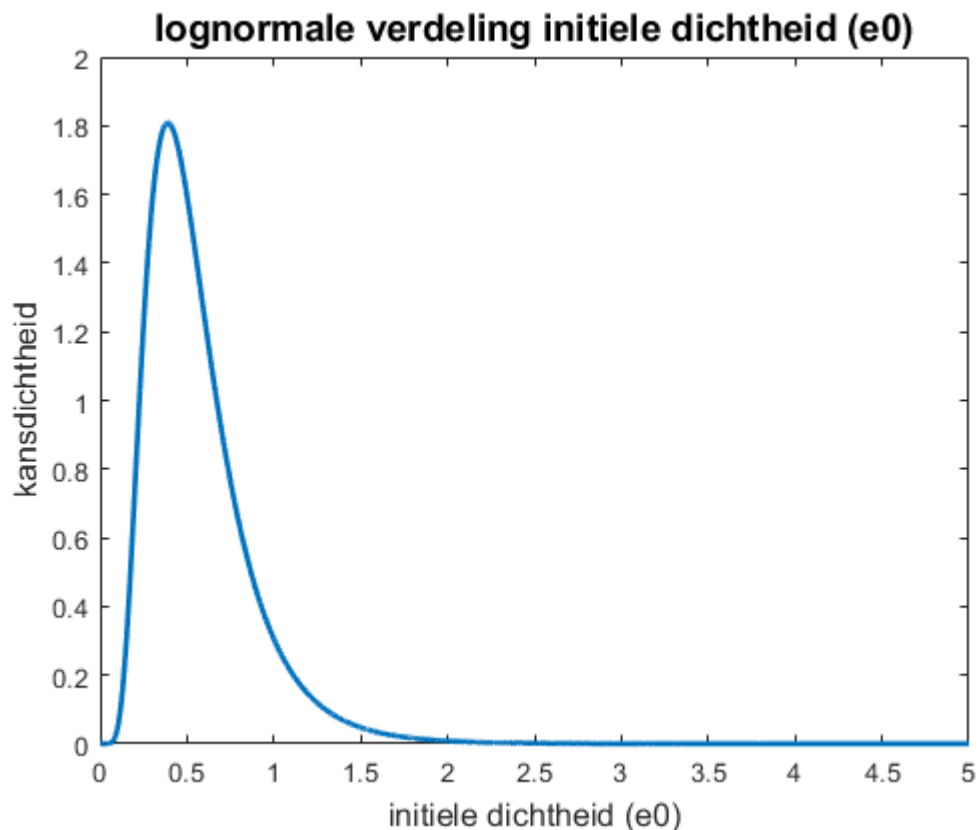
Figuur 8: waterspanningen

Doordat er geen consistente beginconditie gevormd kan worden is het niet mogelijk om op een betrouwbare manier aan te tonen dat verweking afhankelijk is van dichtheidsvariatie. Uit de triaxiaal simulaties blijkt echter dat als onder isotrope condities vervormingsbanden, bifurcatie en verweking wordt veroorzaakt er bovenop het beginconditie probleem mesh-afhankelijkheid ontstaat. De combinatie van deze modelmatige problemen maken het onmogelijk om in dit stadium een specifieke uitspraak te doen over het nut van SOR.

In de conclusie worden de belangrijkste bevindingen van dit haalbaarheidsonderzoek herhaalt.

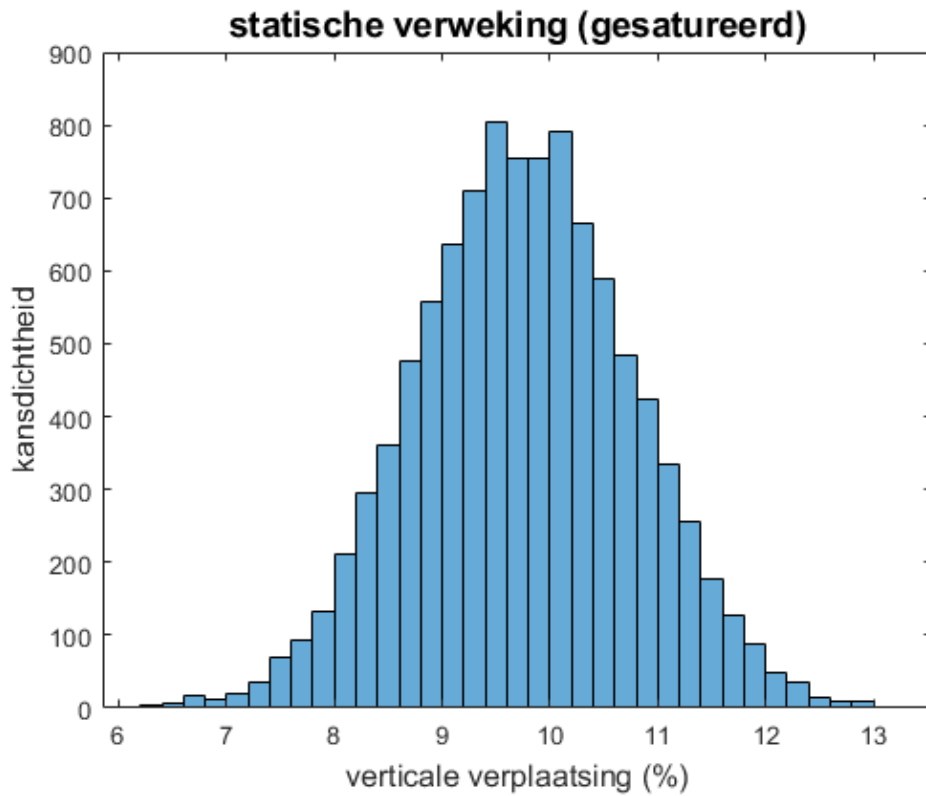
Om toch iets te kunnen zeggen over de belangrijkste componenten van SOR is ervoor gekozen om het triaxiaal experiment van de validatie te herhalen in een Monte-Carlo analyse. Er wordt daarbij een Monte-Carlo analyse uitgevoerd op een verzadigd- en onverzadigd zandmonster. Statische verweking wordt geïnduceerd door het verhogen van de totale spanning op het monster door verticale compressie. De benodigde verticale verplaatsing om tot statische verweking te komen wordt gebruikt om het effect van een variabele initiële dichtheid te bepalen [4]. Verder randvoorwaarden, begincondities en parameters van het experiment komen overeen met de experimenten uit [1] en [3].

In figuur 9 is de lognormale kansverdeling van initiële dichtheid weergegeven. Deze normale verdeling komt tot stand met een gemiddelde waarde $\mu_{e0} = 1/2$ en standaard deviatie $\sigma_{e0} = 1/2$. De correlatie lengte 'theta' voor het experiment is $\Theta = 0.025$ meter. Verder is er is een uniforme zuigspanning van 10 kPa aangebracht in het ongesatureerde monster. Voor verdere toelichting over parameters, randvoorwaarden en initiële condities wordt verwezen naar [1,3].

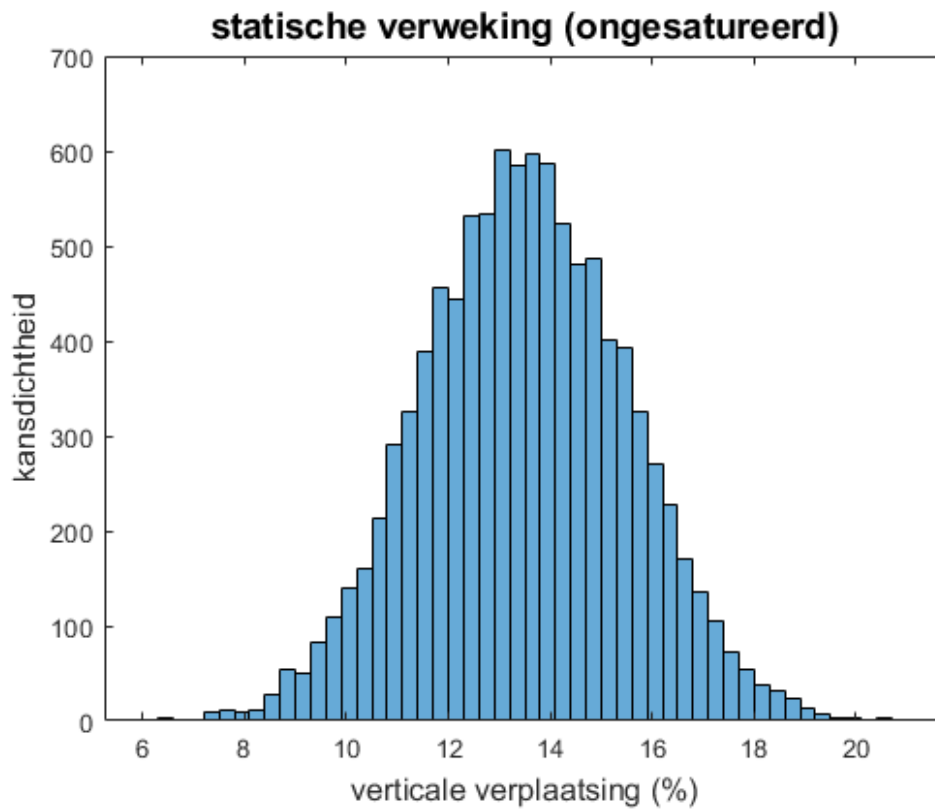


Figuur 9: lognormale distributie initiële dichtheid

Er worden steeds 10.000 Monte-Carlo experimenten uitgevoerd met zowel de gesatureerde en ongesatureerde grondmonster. De resultaten zijn weergegeven in figuur 10 en 11. Te zien is dat het ongesatureerde monster een grotere percentuele verplaatsing nodig heeft voordat statische verweking optreedt dan het ongesatureerde monster. Ook is te zien dat bij beide experimenten de lognormale distributie van de initiële dichtheid van de zandsample een normale distributie veroorzaakt van de verticale verplaatsing die noodzakelijk voor statische verweking.



Figuur 10: benodigde verplaatsing voor statische verweking



Figuur 11: benodigde verplaatsing voor statische verweking

De conclusie van de casestudie is dat de met het rekenmodel opgewekte verweking afhankelijk is van de initiële dichtheidparameter. Het is bekend dat deze parameter in de praktijk binnen een zandlaag kan variëren. Dit impliceert dat statische verweking, heave en vervolgens piping afhankelijk is van de dichtheidsverdeling van zand. Dit valt te verklaren met het critical state concept van het constitutieve grondmodel. De delen van de zandlaag met een lagere dichtheid (hoger e_0) zullen eerder vervormen door toedoen van de verticale verplaatsing. De waterspanningen die vervolgens opgebouwd worden zorgen voor een cascade effect waarbij uiteindelijk alle vervorming lokaliseert in een dunne vervormingsband. Het model loopt vast zodra ongedraineerde bifurcatie ontstaat waarna de maximale verplaatsing van de Monte Carlo iteratie wordt afgelezen.

Het ongesatureerde monster vertoont dezelfde afhankelijkheid van de initiële dichtheid als het gesatureerde monster. De gemiddelde verplaatsing voor verweking is echter hoger door de zuigspanning. Dit is te verklaren door de hogere effectieve spanningen in het ongesatureerde monster. Afhankelijk van de gekozen hydraulische parameters worden de effectieve spanningen verhoogd met ze zuigspanning. Deze nemen af zodra het monster samengedrukt wordt. Het zorgt wel voor een hogere 'weerstand' tegen verweking. In de conclusie wordt ingegaan op de betekenis van de casestudie.

6. Conclusie en aanbeveling

De belangrijkste conclusie is dat met het huidige EEM-model op dit moment hoopvolle resultaten gegenereerd wordt maar dat het nog niet bruikbaar is voor praktische toepassingen. Met name de mesh afhankelijkheid van bifurcatie/verweking is hiervoor een belangrijke oorzaak. Daarnaast is het niet mogelijk gebleken binnen de korte haalbaarheidsstudie realistische anisotrope begincondities te genereren zoals te verwachten valt bij de ondergrond van een waterkering.

Hierdoor is het niet mogelijk om nu al de invloed van het gebruik van een stochastische ondergrond in combinatie met tijdsafhankelijkheid/onverzadigd grondgedrag in kaart te brengen. Wel is het gelukt om bestaande problemen uit de literatuur te simuleren met het EEM-model. Daaruit blijkt dat de variatie in dichtheid, zoals bij praktische situaties te verwachten is, invloed heeft op de locatie en omvang van bifurcatie/verweking. Het is vervolgens ook gelukt om een casestudie op te zetten met alleen triaxiaal monsters in zowel de verzadigde als onverzadigde toestand.

Uit het praktische deel van het haalbaarheidsonderzoek is gebleken dat eerdere wetenschappelijk werk te reproduceren is. Het gaat daarbij om het veroorzaken van verweking in triaxiaal samples met variërende dichtheid. Dit type verweking wordt in de literatuur aangeduid als ongedraineerde bifurcatie [4]. Problematisch bij de simulatie van bifurcatie is het optreden van mesh afhankelijkheid [1], [2], [3]. Bij continuüm modellen zoals de EEM wordt het probleemgebied onderverdeeld in elementen met een gekozen element type en grote. Met element type wordt een probleemgebied bedoeld dat opgedeeld is in vierkante elementen of bijvoorbeeld driehoekige elementen. Het probleemgebied in dit geval is de ondergrond onder een dijk. Mesh afhankelijkheid in continuüm modellen heeft tot gevolg dat de keuze van de grote en type element in het EEM-invloed heeft op het moment van bifurcatie, verweking en uiteindelijk dus of eraan piping en heave gerekend moet worden.

Daarnaast blijkt het lastig te zijn om realistische begincondities te creëren met het gehanteerde EEM-model door de anisotrope grondspanningen die van toepassing is in het probleemgebied. Met anisotroop wordt bedoeld dat de verticale korrelspanning hoger is dan de horizontale korrelspanning. Dit in tegenstelling tot een triaxiaal-test simulatie dat begint met een isotropie korrelspanning (gelijk in alle richtingen). De beginconditie simuleert de initiële cel druk in de triaxiaal cel. Elke EEM-simulatie begint met vooraf vastgestelde begincondities. De ondergrond van een dijk bestaat uit een anisotrope beginconditie waarbij de gekozen parameters moet resulteren in een realistische initiële conditie. Realistisch in dit geval is dat er

een verhouding gevonden wordt tussen verticale en horizontale spanningen die overeenkomt met gangbare verhoudingen. Bij het gebruik van het gehanteerde EEM-model blijkt dit niet haalbaar te zijn.

Het probleem bij de mesh afhankelijkheid van 'bifurcatie' is dat bifurcatie een belangrijke indicator is voor verweking onder een waterkering. Het is juist de bedoeling van het EEM 'framework' om een dusdanige (hydraulische) belasting op te leggen dat bifurcatie en dus verweking ontstaat. Als de keuze van mesh grote en element type invloed heeft hierop ontstaat er een betrouwbaarheidsprobleem. Met betrouwbaarheid wordt niet reproduceerbaarheid bedoeld. In dit kader wordt bedoeld dat met dezelfde (stochastische) parameters toch een andere uitkomst genereerd wordt door een andere mesh grote of type te kiezen.

Uit het onderzoek is gebleken dat variatie in dichtheid te simuleren is met EEM en dat conform eerdere observaties uit de literatuur dichtheid van invloed is op vervormingsbanden, bifurcatie en verweking. Ook is gebleken dat ongesatureerd gedrag voorspelbaar invloed heeft op het moment van verweking. Het stochastische model wat hier gehanteerd is om variatie in initiële dichtheid aan te brengen is inwisselbaar en kan waar mogelijk op de Nederlandse situatie of normen aangepast worden.

Het hier gehanteerde EEM-model is echter nog niet geschikt voor algemene toepassing. Dit komt met name doordat het model met betrekking tot verweking mesh gevoelig is. Bovendien is het moeilijk om realistisch initiële condities te genereren bij problemen anders dan een triaxiaal test.

Een eventueel vervolgonderzoek op basis van dit haalbaarheidsonderzoek zal 3 dingen moeten bevatten:

1. Oplossen van mesh-gevoeligheid
2. Oplossen van initiële conditieproblemen
3. Een algemeen gedragen, op de Nederlandse situatie toepasbaar stochastisch ondergrondmodel
4. Model validatie met triaxiaal testen

Een oplossing van het mesh-gevoeligheidsprobleem kan liggen in het nagaan welke mesh keuzes conservatief zijn in dat ze eerder verweken dan andere keuzes. Het initiële conditieprobleem is moeilijker op te lossen. Wellicht is het van belang beter te kijken naar de in situ spanningen alvorens weer een poging gedaan wordt om een gehele dijk te simuleren.

Bronnen

- [1] R. I. Borja et al., (2013), "Shear band in sand with spatially varying density", *Journal of the Mechanics and physics of Solids*, nr 61, 219-234
- [2] R I. Borja et al., (2006), "Critical state plasticity, Part VI: Meso-scale finite element simulation of strain localisation in discrete granular materials", *Comput. Meth. Appl. Mech Engrg*, nr 195, 5115-5140
- [3] R I. Borja et al., (2013), "Critical state plasticity, Part VII: Triggering a shear band in variably saturated porous media", *Comput. Meth. Appl. Mech Engrg*, nr 261-262, 66-82
- [4] J. E. Andrade, (2009), "A predictive framework for liquefaction instability", *Geotechnique*
- [5] M.G. Jefferies, (1993), 'Norsand: a simple critical state model for sand', *Geotechnique*, 43:91-103
- [6] A. Schofield et al. (1968), "Critical State Soil mechanics", McGraw-Hill, New York
- [7] M. Th. Van Genuchten, (1980), "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils", *Soil Sci. Soc. Am. J.* 44, 892-898
- [8] J. E. Andrade at al., (2007), "Modelling deformation banding in dense and loose fluid-saturated sands", *Finite Elements in Analysis and Design*, nr 43, 361-383
- [9] X. Song et. al. (2014), "Finite deformation and fluid flow in saturated soils with random heterogeneity", *Vadose Zone Journal*
- [10] R I. Borja, (2004), "Cam-Clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media", *Comput. Meth. Appl. Mech Engrg*, nr 193, 5301-5338
- [11] I. M. Smith et al., (2014), "Programming the Finite Element Method", John Wiley & Sons Ltd
- [12] M.A. Biot, (1941), "General theory of three-dimensional consolidation", *Journal of Applied physics* 12, 155-164
- [13] F. T. Tracy (2011). "Analytical and Numerical Solutions of Richards' Equation with Discussions on Relative Hydraulic Conductivity", *Hydraulic Conductivity - Issues, Determination and Applications*, Prof. Lakshmanan Elango (Ed.), ISBN: 978-953-307-288-3, InTech

[14] G.A. Fenton et al. (2008), "Risk Assessment in Geotechnical Engineering", John Wiley & Sons Ltd

[15] Wettelijk Beoordelings Instrumentarium, Rijkswaterstaat, 2017

Appendix: EEM framework (Engels)

Notation (*bold is the tensor notation*)

\mathbf{N}	shape function tensor (displacement) []
$\bar{\mathbf{N}}$	shape function tensor (porewater pressure) []
$\mathbf{1}$	Unit vector
$\nabla^s \mathbf{N}$	derivative shape tensor (displacement) [/m]
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	stress vector [kN]
S_r	degree of saturation []
$S_{r,n}$	degree of saturation previous time-step []
p_w	porewater pressure [kPa]
\mathbf{u}	displacement [m]
dA	element area [m ²]
dL	element length [m]
$\hat{\mathbf{t}}$	traction tensor [kPa]
S_1	min. degree of saturation []
S_2	max. degree of saturation []
s_a	Van Genuchten parameter (1) [kPa]
n	Van Genuchten parameter (2) []
m	Van Genuchten parameter (3) []
p_a	air pressure [kPa]
c_p	capillary pressure [kPa]
ϕ_s	solid fraction []
ϕ_a	air fraction []
ϕ_w	water fraction []
ρ_s	intrinsic solid density [kg/m ³]
ρ_w	intrinsic water density [kg/m ³]

ρ_a	intrinsic air density [kg/m ³]
$\bar{\mathbf{v}}$	Darcy flow tensor [m/s]
k_u	unsaturated permeability []
k_s	saturated permeability [m/s]
\mathbf{E}	derivative shape tensor (porewater pressure) [/m]
g	gravity acceleration [m/s ²]
z	elevation [m]
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	elastic strain tensor []
$\boldsymbol{\varepsilon}^{tr}$	trial strain tensor []
$\Delta\lambda$	plastic multiplier []
G	flow surface [kPa]
F	yield surface [kPa]
I_1	first tensor invariant [kPa]
I_2	second tensor invariant [kPa]
I_3	third tensor invariant [kPa]
J_2	second deviatoric invariant [kPa]
J_3	third deviatoric invariant [kPa]
p'	effective volumetric stress [kPa]
q	deviatoric stress [kPa]
t	lode angle []
δ	yield surface variable []
e	ellipticity parameter []
p_i	image stress [kPa]
$p_{i,n}$	image stress previous time-step [kPa]
$\boldsymbol{\varepsilon}_v^{tr}$	volumetric strain trial []
$\boldsymbol{\varepsilon}_v^e$	volumetric strain elastic []
$\boldsymbol{\varepsilon}_s^e$	deviatoric strain elastic []
$\hat{\lambda}$	virgin compression index []

$\hat{\kappa}$	recompression index []
a	effective pre-consolidation variable (1) []
b	effective pre-consolidation variable (2) []
c	effective pre-consolidation variable (3) []
v_0	reference specific volume []
c_1	unsaturated fitting parameter (1) []
c_2	unsaturated fitting parameter (2) []
$f(s)$	suction function []
K	Bulk modulus [kPa]
μ_0	Shear modulus [kPa]
\mathbf{C}	Stress-Strain tensor [kPa]
Δt	time-step [s]
\bar{p}_c	effective pre-consolidation pressure [kPa]
ε_s	shear strain []
\mathbf{R}	vector with global equations
\mathbf{U}	global solution vector with displacement and porewater pressure
$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}$	derivate matrix of the global equations
μ_k	Mean permeability
σ_k	Standard deviation
θ_k	Isotropic spatial correlation parameter
$\mu_{\ln(k)}$	Mean of the logarithm of permeability
$\sigma_{\ln(k)}$	Standard deviation of the logarithm of permeability

Model formulation

Shear bands in unsaturated porous media is a physical 3-phase coupled problem that is formulated numerical with the momentum- and mass equations so that pore pressures and displacements are simultaneously solved with the FEM at all the (global) elements' nodes. At (local) integration points within each element strains,

stresses, degree of saturation and the constitutive elastic-plastic tangent operator are calculated using the coupled model. A constitutive consistent tangent operator is the result of elastic-plastic soil deformation that couples stresses, strains and (unsaturated) hardening. A multi-level Newton algorithm is used to solve the equations and the local equations are solved in the strain space. Such formulations and their FE codes are found in details in many text books and publications and need not be repeated herein. An overview of the main steps of an iteration towards a solution is provided in box 1. The implementation is made in Matlab and starts with a mesh generator that interprets and sets the BC and then solves the assembled global system of equations at each load-step n.

Global FE equations

The global (Biot) equations to solve for the global FE domain are the momentum and mass equation. Unsaturated behavior is reflected through the degree of saturation S_r and unsaturated Darcy flow $\bar{\mathbf{v}}$.

$$\int_{A1}^{A2} \nabla^s \mathbf{N}^T \{ \bar{\boldsymbol{\sigma}} - S_r p_w \mathbf{1} \} dA - \int_{A1}^{A2} \mathbf{N}^T \rho g dA - \int_{\partial L1}^{L2} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} dL = 0 \quad (1)$$

In equation (1) $\nabla^s \mathbf{N}^T$ represents the derivative of the shape function while S_r represents the degree of saturation function:

$$S_r = S_1 + (S_2 - S_1) \left(1 + \left(\frac{c_p}{s_a} \right)^n \right)^{-m} \quad (2)$$

Where S_1 , S_2 , s_a , n and m are fitting parameters that represent the van Genuchten relation that determine flow and water storage in the unsaturated region [10]. The capillary pressure or suction (c_p) is equal to:

$$c_p = -p_w \quad (3)$$

Furthermore p_w stands for the porewater pressure. The symbol $\bar{\sigma}$ is the effective stress tensor that represent the internal stresses in the soil skeleton. The tensor $\mathbf{1}$ is used to represent the unit vector that connects porewater pressure and degree of saturation to the x-, y- and z-direction effective stresses in the soil. The first part of equation (1) are the equations that are attributed to internal momentum forces. The $\int_{A1}^{A2} dA$ stands for the integration of the area of an element in the case of a two dimensional system.

The external momentum part in equation are the self-weight of the soil and the external forces due to traction. The tensor \mathbf{N}^T stand for the shape function while parameters ρ and g stand for the density and gravity acceleration. Note that density will change with the degree of saturation S_r :

$$\rho = \rho_s \phi_s + \rho_a \phi_a + \rho_w \phi_w \quad (4)$$

ϕ_s, ϕ_a and ϕ_w are the solid, air and water fractions of the mixture. Furthermore ρ_s, ρ_a and ρ_w are the intrinsic densities of the solid, air and water fraction. The solid fraction ϕ_s relate to porosity through:

$$\phi_s = 1 - \frac{v_0 - 1}{v_0} \quad (5)$$

Where v_0 stands for the 'reference specific volume' parameter. When porosity is known the other quantities are calculated through the degree of saturation S_r through:

$$\phi_a = (1 - S_r)(1 - \phi_s) \quad (6)$$

and

$$\phi_w = S_r(1 - \phi_s) \quad (7)$$

The surface forces are calculated over the length of an element side where the external force is applied in the mesh over integral $\int_{\partial L1}^{L2} dL$. The magnitude of the surface force is described by the tensor: $\hat{\mathbf{t}}$.

The second main equation to be solved in the FE mesh is the mass balance:

$$\int_{A1}^{A2} \bar{\mathbf{N}}^t S_r \mathbf{1} \cdot \nabla^s \mathbf{N} (u - u_n) dA \dots$$

$$+ \int_{A1}^{A2} \bar{\mathbf{N}}^t (1 - \phi^s) (S_r - S_{r,n}) dA - \Delta t \int_{A1}^{A2} \mathbf{E}^t \bar{\mathbf{v}} dA = 0 \quad (8)$$

In formula $\bar{\mathbf{N}}$ is the shape function associated to the porewater pressure element. Note that in many FE applications a lower order element is used for the mass balance. This is to cancel out spurious porewater pressure oscillations. However, in this work the same element is chosen where a so-called polynomial pressure projection technique (ppp) is used to stabilize the equations.

Where $\nabla^s \mathbf{N} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_n)$ calculates the mass differential due to volumetric strain. Here u stand for the displacement of an element. The underscore 'n' stands for previous time-step. The first part of the mass balance is thus attributed to the coupling between porewater pressure and displacement. This mirrors the momentum balance of equation (1) where porewater pressure is coupled to the effective soil stresses to form total stresses.

The second part in equation (8) is also called the storage equation where the change in saturation results in a mass change and thus porewater pressure change in the

element [15]. The third part is the mass transport equation where the derivative transpose of the shape function \mathbf{E}^t , time-step Δt and the Darcy flow $\bar{\mathbf{v}}$ is calculate. Note that when Δt no mass transport takes place and the equations becomes the undrained equation that covers a partially- and fully saturated medium. When saturation S_r is equal to unity large part of both equation (1) and (8) disappear and the saturated Biot's equation remain. The Darcy flow function is formulated by:

$$\bar{\mathbf{v}} = -k_u * \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \mathbf{E} \left(\frac{p_w}{\rho_w g} + z \right) \quad (9)$$

Where k_u is the unsaturated equivalent permeability and k_s is the saturated permeability. Since total water pressures are calculated in the current model z represents the elevation of the element. The unsaturated modification to the permeability is calculated with the same "van Genuchten" as S_r :

$$k_u = \theta^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - \theta^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 \quad (10)$$

Where theta θ stand for:

$$\theta = \frac{S_r - S_1}{S_2 - S_1} \quad (11)$$

To solve the global system of equations (1) to (11) the algorithm in Box 1 is needed, similar to the one described in [1]. In Box 1 \mathbf{R} and the derivative of \mathbf{R} with reference to the solution vector \mathbf{U} , $\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}} \right)$ are formed at each iteration step for the implicit Newton solver.

Step 1. Initialize: $n=1$, form mesh, BC, set displacement and porewater pressure vector: \mathbf{U}_n and set image stress p_i^n

Step 2. Load-step loop: apply BC add each load-step, set $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n$ and set $p_i^{n+1} = p_i^n$
Step 3. Iteration loop: loop element and gauss points to form global equation vector \mathbf{R} and equation derivate $\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}$
Step 4. Check at each gauss point of yield surface is crossed, if yes, go to box 2
Step 5. Newton iteration: solve $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1} - \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}}\right)^{-1}$
Step 6. When tolerance is reached close iteration loop, and update \mathbf{U}_n and p_i^{n+1} array's, load next load-step

Box 1: steps in solving the global equations

Local FE equations

As was mentioned earlier, in equation (1), $\bar{\sigma}$ stands for the effective stresses in the soil skeleton. This stress is calculated in each stress point according to an elastic-plastic model depending on the image stress, capillary pressure and the elastic strain trial. The unsaturated elastic-plastic model that was chosen for this research is a generalized unsaturated general Norsand model. These elastic-plastic equations are solved when the yield surface of box 1 is crossed and solved with the implicit algorithm of Box 2. In that case the trial strain $\boldsymbol{\varepsilon}^{tr}$ and capillary pressure c_p are the driving forces for this local implicit algorithm.

The main equations to be solved are:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^{tr} + \Delta\lambda * \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{F} = 0 \quad (13)$$

Where F is the three-invariant unsaturated general Norsand yield surface:

$$F = \delta * q + \frac{M}{N} * (1 - (1 - N) * \left(\frac{p}{p_i}\right)^{\frac{N}{1-N}}) * p \quad (14)$$

M-stands for the slope of the critical state line and determines whether a stress point is on the dilative or compressive side of the yield surface. N is a yield surface parameter.

The plastic multiplier $\Delta\lambda$ is solved separate the plastic part of the trial strain $\boldsymbol{\varepsilon}^{tr}$ and the elastic strain $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. In the case of associated flow, the yield surface F equals the flow surface G. Where p' , q and δ are dependent on the engineering stress:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (15)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \quad (16)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - \sigma_{xy}^2\sigma_z - \sigma_{yz}^2\sigma_x - \sigma_{zx}^2\sigma_y \quad (17)$$

$$J_2 = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2 \quad (18)$$

$$J_3 = \frac{2}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + I_3 \quad (19)$$

$$p' = \frac{1}{3} I_1 \quad (20)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (21)$$

$$t = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{1.5}} \right) \quad (22)$$

Where I_1, I_2, I_3, J_2, J_3 are tensor invariants. Note that p', q and t are analogous to the Haigh-Westergaard coordinates that describe the volumetric, deviatoric and rotation of the stress tensor in the calculation point. δ represent the deviation from ellipticity when the stress tensor moves from a compressive- to an extension state:

$$\delta = \frac{(1 + e) + (1 - e) * \cos(3t)}{(2 e)} \quad (23)$$

Here e stands for the ellipticity parameter that is calculated from the ratio of maximum shear under compression and extension state's. During the formation of a shear band the stresses in each calculation point in the FE mesh can move from a compression- to an extension state for example when confinement pressure is overcome causing the soil to decompress.

The effective image stress \bar{p}_i is dependent on capillary pressure (c_p). The effective image stress \bar{p}_i reflects unsaturated behavior. It amplifies the hardening and softening response of the soil while also determining the size of the yield surface similar to the saturated Norsand soil model.

The image stress change is calculated by:

$$\Delta p_i = h * (p_{i,max} - p_i) * \varepsilon_s^e$$

Where h is a hardening parameter, ε_s^e is the deviatoric strain and $p_{i,max}$ is the max image pressure. The image stress is lined to preconsolidation pressure through the expression:

$$p_i = \frac{p_c}{(1 - N)^{N-1/N}}$$

The effective pre-consolidation \bar{p}_c is linked to the pre-consolidation pressure through:

$$\bar{p}_c = -e^a(-p_c)^b \quad (25)$$

Where the variables a and b are parameters that determine the modification to pre-consolidation pressure to suction according to:

$$b = \frac{\hat{\lambda} - \hat{\kappa}}{\hat{\lambda}c - \hat{\kappa}} \quad (26)$$

$$a = \frac{v_0(c - 1)}{\hat{\lambda}c - \hat{\kappa}} \quad (27)$$

Where:

$$c = 1 - c_1[1 - e^{c_2\xi}] \quad (28)$$

Parameters c_1 and c_2 describe hardening and softening under unsaturated conditions. Finally, ξ stands for:

$$\xi = (1 - S_r)f(s) \quad (29)$$

Where:

$$f(s) = 1 + \frac{c_p/p_a}{\left(10.7 + 2.4(c_p/p_a)\right)} \quad (30)$$

Where p_a is the atmospheric pressure.

Since the local equations are solved in engineering strain space, a hyper elastic tangent operator should be formulated to calculate $\bar{\sigma}$ from $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ according to:

$$d\bar{\sigma} = \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (31)$$

Where $\bar{\sigma}$ represents the engineering stress tensor: $[\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zy}]^T$ and $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ represents engineering strain tensor: $[\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z 2\varepsilon_{xy} 2\varepsilon_{yz} 2\varepsilon_{zy}]^T$.

Here, \mathbf{C} is the second-order hyper-elastic stress-strain tensor:

$$\mathbf{C} = K(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) + 2\mu_0 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) \right) \quad (32)$$

in which μ_0 is the shear modulus and K is the effective pressure dependent hyper elastic bulk modulus. The tensor \mathbf{I} stand for the fourth-order unity tensor.

$$K = \frac{-p'}{\hat{\kappa}} \quad (33)$$

The resulting system of equations is solved on two levels. On the global level equations (1) to (11) will be solved implicitly with a Newton solver. After the solution \mathbf{U} is obtained with displacements (\mathbf{u}) and porewater pressures (p_w) at each node in the FE mesh the resulting trial strain and capillary pressure together with the previous increment pre-consolidation pressure determine whether the calculation point is elastic-plastic yielding according to equation (14). If that is the case equations (12) to (33) are solved in strain space to minimize F and thus calculate the elastic part of the strain tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, pre-consolidation pressure p_c and effective stresses $\bar{\sigma}$. If the material is not yielding equation (31) to (33) are solved to calculate the elastic strain tensor. By solving equation (1) to (33) a complete elastic-plastic description of the soil is obtained that enables strain localization and the

formation of shear bands. This process is described in algorithmic form in Box 1 and Box 2.

Step 1. Initialize: $k=1, \Delta \lambda = 0, \boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^{tr}, c_p = -p_w, p_i = p_{i,n}$
Step 2. Initial conditions: calculate $S_r, \bar{p}_c, \boldsymbol{x}^k = [\boldsymbol{\varepsilon}^e; \Delta \lambda]$
Step 3. Iteration loop: form local equation vector \boldsymbol{r} and equation derivate $\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{x}}$
Step 4. Newton iteration: $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{x}}\right)^{-1} \boldsymbol{r}$
Step 5. Update: calculate $\bar{\boldsymbol{\sigma}}, p_i, \bar{p}_i$ and $\boldsymbol{\varepsilon}^e$
Step 6. When tolerance is reached close iteration loop, and return to box 1

Box 2: steps in solving the local equations

